доц. д-р Ѓорѓи Манчески вер. 2.0

ЛИНЕАРНО ПРОГРАМИРАЊЕ

ДЕФИНИРАЊЕ НА ЗАДАЧА ОД МАТЕМАТИЧКО ПРОГРАМИРАЊЕ

Да се определи векоторот на состојба:

$$\vec{X} = (x_1, x_2, x_3, \ldots., x_n)$$

кои ги задоволуваат следните m услови:

$$f_i(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)\ \{\leq; =; \geq\}\ b_i$$

$$i = 1, 2, \ldots., m$$

а функцијата

$$Z = \varphi(x_1, x_2, \ldots., x_n)$$

достигнува максимум или минимум, и припаѓа на областа за математичко програмирање.

МАТЕМАТИЧКО ПРОГРАМИРАЊЕ

Условите претставуваат ограничувања, а функцијата **Z** функција на критериумот.
Ако е:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

и

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

каде a_{ij} и c_j претставуваат константи, задачата се сведува на задача од **линеарно програмирање**.

Од множеството задачи што припаѓаат на линеарното програмирање ќе издвоиме само поодделни врсти на задачи што нашле примена во многуте дисциплини.

ПОДЕЛБА НА МАТЕМАТИЧКОТО ПРОГРАМИРАЊЕ

Според задачата, ограничувањата, функцијата на критериумот и суштината на проблемот математичкото програмирање се дели на:

- линеарно програмирање,
- параметарско програмирање,
- квадратно програмирање,
- динамичко програмирање,
- стохастичко програмирање,
- целобројно програмирање,
- програмирање 0 и 1.

Фокусот на вниманието ќе биде на линеарнто, параметарското и целобројното програмирање.

ПРОИЗВОДНИ ПРОБЛЕМИ

Под производен проблем се подразбира избор на оптимална структура на производна програма.

При подготовка на моделот за критериум на оптималност се зема приходот, вредност на производството, трошоците, суровините идр.

Како ограничувања при реализацијата може да се земе работната сила, потребната структура на машини и други специфични фактори на предметот на трудот.

При дефинирањето на моделот на линеарно програмирање потребно е да се даде функцијата на критериум и ограничувањата.

МОДЕЛ ЗА ОПТИМИЗИРАЊЕ НА ПРОИЗВОДНА ПРОГРАМА

Нека во едно производно претпријатие се произведуваат два артикли A_1 и A_2. Ова претпријатие располага со машии кои поради почетна едноставност, ќе ги класифицираме во две групи. Нека е **час** одбрана како временска единица во која е изразен капацитетот на машините како максимално ограничено време за ефективна работа. Машините од првата група можат да потрошат најмногу 800 часови, а машините од втората група 900 часови. Времето потребно за единица артикал да се обработува на соодветната група на машини е дадено во табелата:

Производ	Машини	
	I група	**II група**
A_1	4	3
A_2	1	2

Во текот на времето пазарот може да апсорбира 2000 единици од артиклот A_1 и 1800 единици од артиклот A_2.

Претпријатието остварува доход 20 денари по единица од артикал A_1 и 25 денари по единица од артикал A_2. Каква производна програма да усвои претпријатието за да оствари максимален доход.

МОДЕЛ ЗА ОПТИМИЗИРАЊЕ НА ПРОИЗВОДНА ПРОГРАМА

x_1 - количина на артиклот A_1

x_2 - количина на артиклот A_2

Определувањето на x_1 и x_2 значи дека сме нашле оптимална производствена програма.

I – Функцијата на критериум е дефинирана со релација за која треба да се максимум при определените ограничувања за да решението е опримално.

$$\max f(x) = 20 \cdot x_1 + 25 \cdot x_2$$

II – Односите на факторите за ограничување за дадениот пример се:.

$4 \cdot x_1 + \quad x_2 \leq 800$ - ангажирано време на работа на I-вата група на машини

$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 900$ - ангажирано време на работа на II-вата група на машини

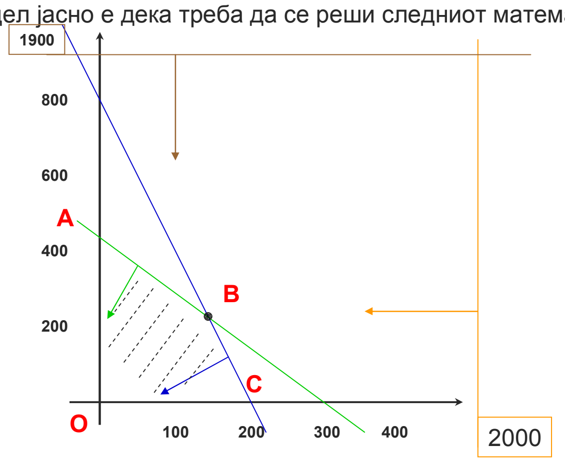
МОДЕЛ ЗА ОПТИМИЗИРАЊЕ НА ПРОИЗВОДНА ПРОГРАМА

Според претходниот модел јасно е дека треба да се реши следниот математички модел:

$$\max\{20 \cdot x_1 + 25 \cdot x_2\}$$

при ограничувања:

$$4 \cdot x_1 + \quad x_2 \leq 800$$
$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 900$$
$$x_1 \qquad \leq 2000$$
$$x_2 \leq 1800$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



МОДЕЛ ЗА ОПТИМИЗИРАЊЕ НА ПРОИЗВОДНА ПРОГРАМА

Секоја точка во четириаголникот ОАВС ги задоволува поставените неравенства. Нека земеме неклку точки што припаѓаат на четириаголникот.
$M_1(0, 0)$; $M_2(100, 0)$; $M_3(0, 300)$; $M_4(100, 100)$; $M_5(200, 0)$; $M_6(0, 450)$; $M_7(140, 240)$

Сите точки ги задоволуваат неравенствата:

$4\cdot x_1 + x_2 \le 800$ $3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 900$ $M_1(0, 0)$ $0 \le 800$ $0 \le 900$ *точно* $f(M_1) = 0$	$4\cdot x_1 + x_2 \le 800$ $3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 900$ $M_5(200, 0)$ $800 \le 800$ $600 \le 900$ *точно* $f(M_1) = 4000$
$4\cdot x_1 + x_2 \le 800$ $3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 900$ $M_2(100, 0)$ $400 \le 800$ $300 \le 900$ *точно* $f(M_2) = 2000$	$4\cdot x_1 + x_2 \le 800$ $3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 900$ $M_6(0, 450)$ $450 \le 800$ $900 \le 900$ *точно* $f(M_1) = 11250$
$4\cdot x_1 + x_2 \le 800$ $3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 900$ $M_3(0, 300)$ $300 \le 800$ $600 \le 900$ *точно* $f(M_1) = 7500$	$4\cdot x_1 + x_2 \le 800$ $3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 900$ $M_6(140, 200)$ $760 \le 800$ $820 \le 900$ *точно* $f(M_1) = 8800$
$4\cdot x_1 + x_2 \le 800$ $3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 900$ $M_4(100, 100)$ $500 \le 800$ $900 \le 900$ *точно* $f(M_1) = 4500$	

МОДЕЛ ЗА ОПТИМИЗИРАЊЕ НА ПРОИЗВОДНА ПРОГРАМА

Констатираме дека сите точки со вредностите ги задоволуваат условите и дека доходот зависи од точките. Од пресметаните вредности се закнлучува:

- од 7-те точки најдобра е точката M_6.

Од ова се заклучува дека ако се избира структурата на производство како алтернатив од овие 7 варијати ќе се одлучи за производство на 450 единици од артиклот A_2.

Дали постои точка што припаѓа во четириаголникот (која ги задоволува ограничувањата) и која обезбедува поголем доход?

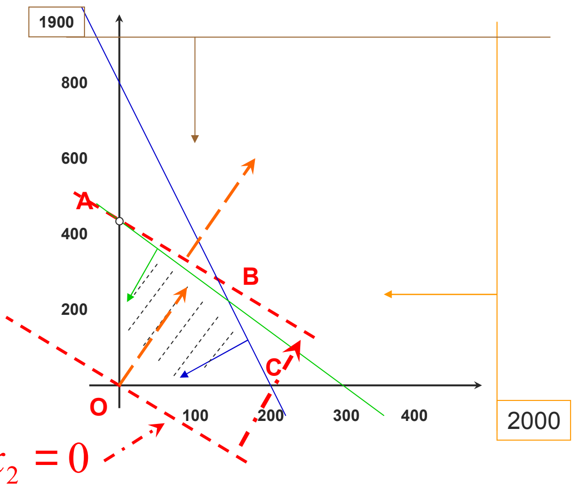
Ваквиот начин на пробување е некако можен кога се има две или три променливи но истиот не претставува правилен пристап. Еден начин на решавање на проблемот е геометриското решавање. Ова геометриско решавање претставува исправен пристап и со овој метод се рашаваат проблми со две а многу тешко и со три променливи.

ГЕОМЕТРИЈСКО РЕШЕНИЕ

$\max\{20\cdot x_1 + 25\cdot x_2\}$

при ограничувања:

$$4\cdot x_1 + \quad x_2 \le 800$$
$$3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 900$$
$$x_1 \qquad \le 2000$$
$$x_2 \le 1800$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$



$$20\cdot x_1 + 25\cdot x_2 = 0$$

ГЕОМЕТРИЈСКО РЕШЕНИЕ

Од претходното се заклучува дека решението на моделот е:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 450$$

При што вредноста на функцијата е:

$$f(0, 450) = 11250$$

Според претходното решенито на поставениот производствен програм е:
- Претпријатието треба да произведува 450 единици од артиклот A_2 при што ќе оствари доход од 11250 денари.

ПРОБЛЕМ НА МЕШАВИНА

Правењето на еден производ честопати се прави од повеќе суровини. Пример составот на храната за стоката се даваат определени количини на биохемијски состојки, во определување на храната на болните им се даваат исто така состојки на белковини, масноти и витамини итн.

Како да се определи мешавината со некои ограничувања и оптималност на функцијата на критериумот?

Овој проблем припаѓа на решавање на проблеми на мешавина и се решаваат со методите на линеарно програмирање.

ПРОБЛЕМ НА МЕШАВИНА

Нека една легура се прави од четири суровини A, B, C и D н нека легурата содржи најмалки 20 % калај што се содржи во дадените суровини:

- во суровината A има 25 % калај,
- во сурививата B има 40 % калај,
- во суровината C има 15 % калај,
- во суровината D има 30 % калај.

Цените по единица суровина се дадени во табелата:

A	B	C	D
30	20	10	40

Дополни услови:

- суровината A не може да биде застапена повеќе од 40 %,
- суровините B и C заедно не можат да бидат застепани повеќе од 30 %
- и други услови.

На основа на претходно презентираните услови може да се дефинира проблемот на мешавина.

МОДЕЛ НА ПРОБЛЕМОТ НА МЕШАВИНА

x_A, x_B, x_C, x_D - количини на суровините A, B, C, D

$$f(x) = 30 \cdot x_A + 20 \cdot x_B + 10 \cdot x_C + 40 \cdot x_D$$

При ограничувања:

$$\begin{array}{lllll} 25 \cdot x_A & +40 \cdot x_B & +15 \cdot x_C & +30 \cdot x_D & \geq 20 \\ 100 \cdot x_A & & & & \leq 40 \\ & 100 \cdot x_B & +100 \cdot x_C & & \leq 30 \\ 100 \cdot x_A & +100 \cdot x_B & +100 \cdot x_C & +100 x_D & = 100 \end{array}$$

ПРОБЛЕМ НА КОРИСТЕЊЕ НА КАПАЦИТЕТОТ

Овој модел претставува решавање на проблмот на производство со оптимално користење на капацитетот.
При ова подразбираме најголем можен коефициент на ангажирање на сасположливите капацитети.

Нека во едено претпријатие се најдуваат m машини.

$r_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_i} x_{ij}$ - коефициент за користење на i-тата машина.

a_{ij} - време потребно за да на i-тата машина се произведе единица од j-тиот производ, a_i-капацитетот на r-тата машина изразен во време

$\bar{r} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_i} \cdot x_j$ - просечна вредност на коефициентот r.

$a = \sum_{i=1}^{m} a_i$ - капацитет на сите машини

$a_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$ - потребно време за производство на единица од j-тиот производ на сите машини.

Функција на критериум:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{a} \cdot x_j$$

МЕТОДИ ЗА РЕШАВАЊЕ НА ЛИНЕАРНОТО ПРОГРАМИРАЊЕ

ЗАДАЧА НА ЛИНЕАРНО ПРОГРАМИРАЊЕ

Во просторот *Rn*^{2}, функцијата: $f(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ ќе ја викаме линеарна форма бидејќи е:

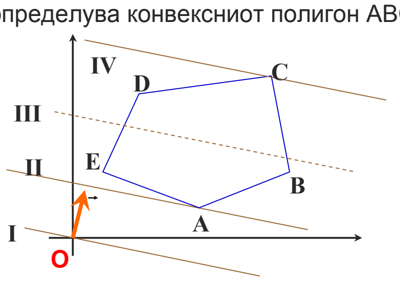
$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ и

$f(\lambda x_1)=\lambda f(x_1)$

А навистина од: $f(\sum \lambda_i x_i)=\sum \lambda_i f(x_i)$ следува линеарност на функцијата.

Максимална и минимална вредност линеарната форма на конвексниот полиедар достигнува во по едно од темињата.

Нека набљудуваме симултан систем на нееднаквости со две променливи x_1 и x_2 и нека тој систем го определува конвексниот полигон ABCDE.



ЗАДАЧА НА ЛИНЕАРНО ПРОГРАМИРАЊЕ

Нека точките (x_1, x_2) се точки на рамнината x_1Ox_2 за кои определуваме вредност на линеарната форма. Точките M(x_1', x_2') му припаѓаат на полигонот ABCDE (внатрешноста на контурите). За фиксната точка M_O(x_1', x_2') линеарната форма:

$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2$ има фиксна вредност, т.е. $f(x) = c_1x_1' + c_2x_2'$

Оваа права е нормална на векторот: $\vec{c} = (c_1, c_2)$

Векторот r претставува градиент на линеарната форма. Поместувајќи ја правата паралелно во правец на градиентот во точката **A** линеарната форма достигнува минимум, а во точката **C** линеарната форма достигнува максимум. Претставената линеарна форма можеме да ја изразиме како скаларен производ на константниот вектор

$\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ и векторот $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ т.е. $f = (\vec{c} \cdot \vec{x})$

$$f = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

ЗАДАЧА НА ЛИНЕАРНО ПРОГРАМИРАЊЕ

Нека е G конвексен полиедар, со конечен број на миња $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_S$ и нека во точката $P \in G$, линеарната форма достигнува минимална вредност. Тогаш помеѓу точките $A_1, A_2, \ldots, A_K, \ldots, A_S$ постои барем една за која важи:

$$f = (\vec{c} \cdot P) = (\vec{c} \cdot A_A)$$

Ако претходното не важи т.е. вредноста на линеарната форма за точката A_K е поголема од вредноата на линеарната форма за точката P, т.е.

$$(\vec{c} \cdot A_K) > (\vec{c} \cdot P)$$

Бидејќи е G конвексно множеств P може да се изрази преку:

$$P = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i A_i, \quad \sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1$$

од претходното следува:

$$(\vec{c} \cdot P) = (\vec{c} \cdot \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \cdot A_i) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i (\vec{c} \cdot A_i) > \sum_{i}^{s} \alpha_i (\vec{c} \cdot P)$$

Од претходното добивме $(\vec{c} \cdot P) > (\vec{c} \cdot A_A)$ што не упатува на отврлање на претпоставката $(\vec{c} \cdot A_K) > (\vec{c} \cdot P)$

ЗАДАЧА НА ЛИНЕАРНО ПРОГРАМИРАЊЕ

Според претходното се освојува дека линеарната форма $f = (\vec{c} \cdot P) = (\vec{c} \cdot A_A)$ достигнува минимум во темето на конвексниот полиедар.

Аналогно се покажува и за максималната вредност на линеарната форма

СВЕДУВАЊЕ НА НЕЕДНАКВОСТИТЕ НА ЕДНАКВОСТИ ПРИ РЕШАВАЊЕТО НА ЗАДАЧАТА НА ЛИНЕАРНО ПРОГРАМИРАЊЕ

Нека е даден системот на неедначкости:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \ , \quad i = 1,2,3,\dots,m$ кој во просторот R_n определува полиедар.

Ако на секја неравенка од левата страна додадеме ненегативна големина y_i се добива систем од m еднаквости.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i = b_i \ , \quad i = 1,2,3,\dots,m$$

Променливата y_i ја викаме дополнителна променлива.

СВЕДУВАЊЕ НА НЕЕДНАКВОСТИТЕ НА ЕДНАКВОСТИ

Ако е $x_1', x_2', x_3', \dots, x_n'$ едно решение на системот на неравенки тогаш имаме

$$y_i' = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j' \ , \quad i = 1,2,\dots,m$$

Обратно пак, при секое решение $x_1', x_2', x_3', \dots, x_n', y_1', y_2', \dots, y_m'$ за системот равенки при условот $y_i' \geq 0$ постои определено решение на неравенките.
Ако се $y_i' \geq 0$, тогаш е:

$$\sum a_{ij}x_j \leq b_i \ , \quad i = 1,2,\dots,m$$

Па множеството $(x_1', x_2', x_3', \dots, x_n')$ е навистина решение на системот неравенки.
Ако е пак системот на неравенки даден во форма:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \ , \quad i = 1,2,\dots,m$$

тогаш до еднаквоста се доаѓа со додавање на една непозитивна променлива

$-y_i \leq 0$ при што се добива: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - y_i = b_i \ , \quad i = 1,2,\dots,m$

СВЕДУВАЊЕ НА НЕЕДНАКВОСТИТЕ НА ЕДНАКВОСТИ

И овде променливите y_i се викаат дополнителни променливи.

Заради едноставност при решавањето во суштина не додаваме y_i туку $y_i - u_i$ каде $-y_i$ е нашто поголема од апсолутната вредност која нееднаквоста ≥ во нееднаквост ≤, а u_i ја претвора нееднакоста ≤ во еднаквост. Одовде променливата u_i се вика вештачка променлива и тие се ненегативни $u_i \geq 0$.

Според ова секој систем на неравенки може да биде сведен на систем на еднаквости.

ФОРМУЛАЦИЈА НА ЗАДАЧАТА НА ЛИНЕАРНО ПРОГРАМИРАЊЕ

За дадената структура на променливите $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ потребно е да се определи таков вектор $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_n^*)$

за кој ќе достигне максимална вредност линеарната форма

$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ при услови $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$, $i = 1,2,3,\ldots,m$ $x_j \geq 0$

доц. д-р Ѓорѓи Манчески вер. 2.0

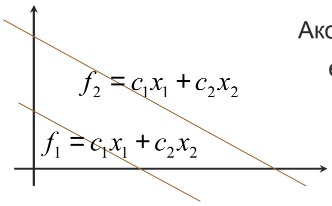
СИМПЛЕКС МЕТОДА

ГРАФИЧКО РЕШАВАЊЕ

Ако проблемот нема повеќе од две (евентуално три) променливи тогаш тој може да се реши со графичка метода.

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

Ако земеме $f(x) = f_1$ тогаш правата линија $f_1 = c_1 x_1 + c_2 x_2$ има положба претставена на сликата



Ако $f_2 > f_1$ тогаш правата $f_2 = c_1 x_1 + c_2 x_2$ е пооддалечена од координатниот почеток отколку правата $f_1 = c_1 x_1 + c_2 x_2$

За овој факт се води сметка при определувањето на максимум односно минимум.

Множеството на ограничувања го дефиира конвексниот полигон, или конвексниот полиедар кој истовремено ги определува можните решенија на задачата.

ГРАФИЧКО РЕШАВАЊЕ

Секоја нееднаквост го дели просторот на два дела

- еден кој ја задоволува нееднаквоста и
- друг кој не ја задоволува нееднаквоста.

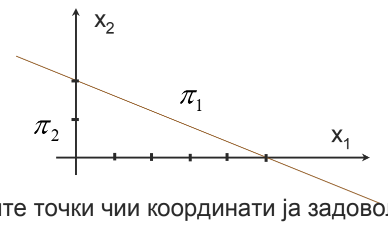
На овој начин се определува областа во која се задоволени сите нееднаквости.

Пример: Нека е дадена следната нееднаквост:

$$2x_1 + 6x_2 \le 10$$

$$\downarrow$$

$$2x_1 + 6x_2 = 10 \longrightarrow$$



Полурамнината π_1 ги содржи сите точки чии координати ја задоволуваат нееднаквоста $2x_1 + 6x_2 > 10$ а полурамнината π_2 ги содржи сите точки чии координати ја задоволуваат нееднаквоста $2x_1 + 6x_2 < 10$

Еднаквоста пак е претставена со множеството точки на правата.

ГРАФИЧКО РЕШАВАЊЕ

Нека е дадено множеството неедначкости:

$I \quad x_1 + x_2 \geq 2$

$II \quad x_1 - x_2 \leq 1$

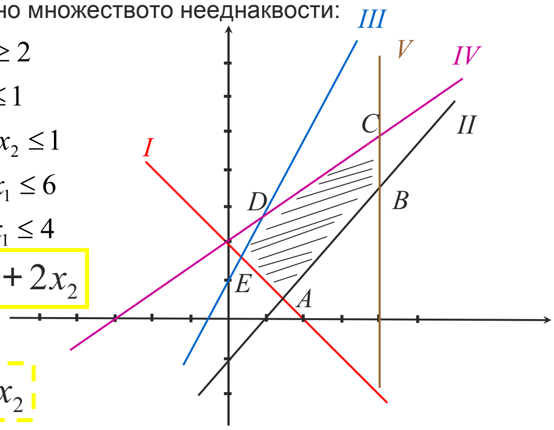
$III \quad -2x_1 + x_2 \leq 1$

$IV \quad 3x_2 - 2x_1 \leq 6$

$V \quad x_1 \leq 4$

$\boxed{f(x) = x_1 + 2x_2}$

$0 = x_1 + 2x_2$



ГРАФИЧКО РЕШАВАЊЕ

Нека е дадено множеството неедначкости:

$I \quad x_1 + x_2 \geq 2$

$II \quad x_1 - x_2 \leq 1$

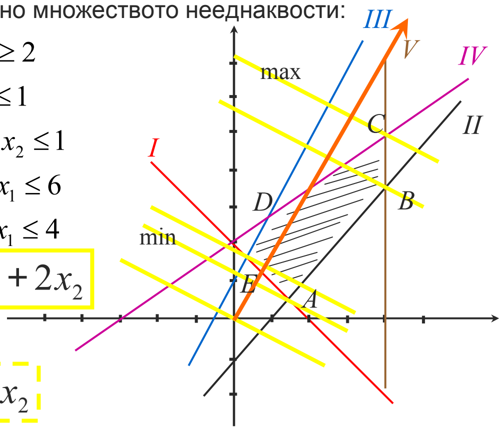
$III \quad -2x_1 + x_2 \leq 1$

$IV \quad 3x_2 - 2x_1 \leq 6$

$V \quad x_1 \leq 4$

$\boxed{f(x) = x_1 + 2x_2}$

$0 = x_1 + 2x_2$



$A(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \qquad f(A) = 2\frac{1}{2}$

$B(4,3) \qquad f(B) = 10$

$C(4, 4\frac{2}{3}) \qquad f(C) = 13\frac{1}{3}$

$D(\frac{3}{4}, 2\frac{1}{2}) \qquad f(D) = 5\frac{3}{4}$

$E(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}) \qquad f(E) = 3\frac{2}{3}$

СИМПЛЕКС МЕТОДА

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n = CX = \begin{bmatrix} c_1 & \ldots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_n \end{array}$$

$$Rang(A) = m$$

СИМПЛЕКС МЕТОДА

$$\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & + x_{n+1} & & & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & & + x_{n+2} & & = b_2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & & & + x_{n+m} & = b_m \end{array}$$

СИМПЛЕКС МЕТОДА

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & . & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \dots \\ x_{n+m-1} \\ x_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

СИМПЛЕКС МЕТОДА

$$A * X = B$$

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= b_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ x_{n+2} &= b_2 - \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n+i} &= b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n+m} &= b_m - \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \end{aligned}\right] \to x_j = 0, \quad j = 1,2,\dots,n \quad i = 1,2,\dots,m$$

СИМПЛЕКС МЕТОДА (ПРИМЕР)

11. Една фабрика произведува два производи P1 и P2 во два погони A и B. Фабриката испорачува производ P2 на својот деловен партнер кој ги откупува сите количини до 4000 тони, додека производот P1 го продава преку своите складишта на купувачите K1, K2, K3 и K4 и тоа по 300, 300, 400 и 200 тони респективно. На пазарот повеќе од овие количини не можат да се продадат, но на купувачите не мора обавезно да им се доставaт. Производството се изведува под следните услови:

	Производ		Капацитет
	P1	P2	
A	2	2	20000 часови
B	1	1/2	16000 часови
Доход	100 ден	200 ден	

Колку тони од P1 и P2 треба да се произведат така што претпријатието да обезбеди максимален доход.

СИМПЛЕКС МЕТОДА (ПРИМЕР 2)

14. Со симплекс метода да се реши следната задача од линеарно програмирање:

$\min f(x) = 260 \cdot x_1 + 360 \cdot x_2 + 280 \cdot x_3$ со следните ограничувања:

$$4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 \geq 640$$
$$9 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 \leq 928$$
$$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 800$$

ПОСТОПТИМАЛНА АНАЛИЗА

ПОСТОПТИМАЛНА АНАЛИЗА

14. Со симплекс метода да се реши следната задача од линеарно програмирање:

$$\min f(x) = 260 \cdot x_1 + 360 \cdot x_2 + 280 \cdot x_3$$ со следните ограничувања:

$$4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 \geq 640$$
$$9 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 \leq 920$$
$$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 800$$

Постоптималната анализа се состои од анализа на добиеното решение во смисол на тоа дали при некои промени во моделот решението ќе остане оптимално или пак ќе претпри промени како и тоа колку е осетливо на промени.

Можни промени:

1. **Промена на коефициентите на функцијајата на целта,**
   - промена на коефициентот на небазична променлива,
   - промена на коефициентот на базична променлива.

ПРОМЕНА НА ВЕКТОРОТ *C*

Промена на коефициентот на небазична променлива,

$$c_j^+ = c_j + \Delta c_j$$

$$c_j^+ - z_j = c_j + \Delta c_j - z_j = c_j - z_j + \Delta c_j = z_j + \Delta c_j$$

$\Delta c_j < 0$ и ако се бара максимум на функцијата нема шанси да влези во базата

$\Delta c_j > 0$ и ако се бара минимум на функцијата нема шанси да влези во базата

Во други случаеви се прави анализа на изразот

$$c_j^+ - z_j = c_j + \Delta c_j - z_j = c_j - z_j + \Delta c_j = z_j + \Delta c_j$$

Промена на коефициентот на базична променлива,

Во ваков случај треба да се пресметаа новите вредности на z_j

После препресметување на новите вредности на z_j се определуваат разликите $c_j - z_j$

и од нив се согледува дали предвиденото решение е оптилано.
Ако решението е оптимално потребно е да се препресмета вредноста на функцијата.

ПРОМЕНА НА ВАКТОРОТ *B*

Промена на векторот B

Во ваков случај треба да се пресметаа новите вредности на z_j

$$X_B = B^{-1} \cdot B$$

$$X_B^+ = B^{-1} \cdot B^+$$

$$X_B^+ = B^{-1} \cdot (B + \Delta B) = B^{-1} B + B^{-1} \cdot \Delta B$$

$$X_B^+ = B^{-1} \cdot (B + \Delta B) = B^{-1} B + B^{-1} \cdot \Delta B = X_B + \Delta X_B$$

Се додека $X_B^+ \geq 0$ решението е сеуште оптимално.

ПРОМЕНА НА ВЕКТОРОТ *A*

Промената на векторот А може да се јави во следниве случаеви:

- •промена на небазичен вектор,
- •промена на базичен вектор,
- •воведување на нов вектор (нова променлива),
- •воведување на нови ограничувања.

Промена на небазичен вектор:

Во ваков случај се определува z_j за новиот вектор и се проверува дали тој влегува во базата. Ако не влегува значи претходното оптимално решение останува оптимално.

Промена на базичен вектор:

Промена на базичен вектор подразбира повторување на последната итерација и проверка дали решението останува оптимално или пак тоа се променило.

ПРОМЕНА НА ВЕКТОРОТ *A*

Воведување на нов вектор (нова променлива):

Овој случај подразбира дополнување определување на z_j за новата променлица и проверка дали оваа променлива влегува во базата. Ако не влегува решението е оптимално, а во спротивен случај се продолжува со решавање.

Воведување на ново ограничување:

Овој случај подразбира дополнување на последната база со новиот вектор и повторување на последната итерација.

Новата база е:

$$B^{+} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ T & E \end{bmatrix}$$

Со неа се повторува последната итерација.

ПРОДОЛЖЕНИЕ .....

$$B_3 = [A_3\ A_1\ A_2] = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 5 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B_3^{-1} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 32 & -12 & -10 \\ -16 & 12 & 2 \\ -8 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$X_{B_3} = B_3^{-1} \cdot B = B_3^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 640 \\ 920 \\ 800 \end{bmatrix} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 1440 \\ 2400 \\ 7680 \end{bmatrix} \longrightarrow \quad x_1 = \frac{2400}{48} = 50 \quad x_3 = \frac{1440}{48} = 30 \quad x_2 = \frac{7680}{48} = 160 \quad f(x) = 79000$$

$$X_{B_3}^4 = B_3^{-1} \cdot A_4 = B_3^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} -32 \\ 16 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad X_{B_3}^6 = B_3^{-1} \cdot A_6 = B_3^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_{B_3}^5 = B_3^{-1} \cdot A_5 = B_3^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 32 \\ -16 \\ -8 \end{bmatrix} \qquad X_{B_3}^7 = B_3^{-1} \cdot A_7 = B_3^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} -10 \\ 2 \\ 16 \end{bmatrix}$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ .....

$$F = [c_3\ c_1\ c_2] \cdot [X_{B_3}^4 \quad X_{B_3}^5 \quad X_{B_3}^6 \quad X_{B_3}^7] = [280 \quad 260 \quad 360] \frac{1}{48} \cdot \begin{bmatrix} -32 & 32 & -12 & -10 \\ 16 & -16 & 12 & 2 \\ 8 & -8 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$F = \frac{1}{48}[-1920 \quad 1920 \quad -240 \quad 3480]$$

$$c_4 - F_4 = 0 - \frac{-1920}{48} = \frac{1920}{48} \geq 0$$

$$c_5 - F_5 = M - \frac{1920}{48} \geq 0$$

$$c_6 - F_6 = 0 - (-240) = 240 > 0$$

$$c_7 - F_7 = M - \frac{3480}{48} \geq 0$$

→ Оптимално решение

$$x_1 = \frac{2400}{48} = 50 \qquad x_3 = \frac{1440}{48} = 30$$

$$x_2 = \frac{7680}{48} = 160 \qquad f(x) = 79000$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ .....

$$B_3 = [A_3\ A_1\ A_2] = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 5 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B_3^{-1} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 32 & -12 & -10 \\ -16 & 12 & 2 \\ -8 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$X_{B_3} = B_3^{-1} \cdot B = B_3^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 640 \\ 920 \\ 800 \end{bmatrix} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 1440 \\ 2400 \\ 7680 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{ll} x_1 = \frac{2400}{48} = 50 & x_3 = \frac{1440}{48} = 30 \\ x_2 = \frac{7680}{48} = 160 & f(x) = 79000 \end{array}$$

$$X_{B_3}^4 = B_3^{-1} \cdot A_4 = B_3^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} -32 \\ 16 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad X_{B_3}^6 = B_3^{-1} \cdot A_6 = B_3^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_{B_3}^5 = B_3^{-1} \cdot A_5 = B_3^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 32 \\ -16 \\ -8 \end{bmatrix} \qquad X_{B_3}^7 = B_3^{-1} \cdot A_7 = B_3^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} -10 \\ 2 \\ 16 \end{bmatrix}$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ .....

$$F = [c_3\ c_1\ c_2] \cdot [X_{B_3}^4 \quad X_{B_3}^5 \quad X_{B_3}^6 \quad X_{B_3}^7] = [280 \quad 260 \quad 360] \frac{1}{48} \cdot \begin{bmatrix} -32 & 32 & -12 & -10 \\ 16 & -16 & 12 & 2 \\ 8 & -8 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$F = \frac{1}{48}[-1920 \quad 1920 \quad -240 \quad 3480]$$

$$c_4 - F_4 = 0 - \frac{-1920}{48} = \frac{1920}{48} \geq 0$$

$$c_5 - F_5 = M - \frac{1920}{48} \geq 0$$

$$c_6 - F_6 = 0 - (-240) = 240 > 0$$

$$c_7 - F_7 = M - \frac{3480}{48} \geq 0$$

→ Оптимално решение

$$x_1 = \frac{2400}{48} = 50 \qquad x_3 = \frac{1440}{48} = 30$$

$$x_2 = \frac{7680}{48} = 160 \qquad f(x) = 79000$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ .....

$$B_3 = [A_3\ A_1\ A_2] = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 5 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B_3^{-1} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 32 & -12 & -10 \\ -16 & 12 & 2 \\ -8 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$X_{B_3} = B_3^{-1} \cdot B = B_3^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 640 \\ 920 \\ 800 \end{bmatrix} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 1440 \\ 2400 \\ 7680 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} x_1 = \frac{2400}{48} = 50 & x_3 = \frac{1440}{48} = 30 \\ x_2 = \frac{7680}{48} = 160 & f(x) = 79000 \end{matrix}$$

$$X_{B_3}^4 = B_3^{-1} \cdot A_4 = B_3^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} -32 \\ 16 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad X_{B_3}^6 = B_3^{-1} \cdot A_6 = B_3^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_{B_3}^5 = B_3^{-1} \cdot A_5 = B_3^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 32 \\ -16 \\ -8 \end{bmatrix} \qquad X_{B_3}^7 = B_3^{-1} \cdot A_7 = B_3^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} -10 \\ 2 \\ 16 \end{bmatrix}$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ .....

$$F = [c_3\ c_1\ c_2] \cdot [X_{B_3}^4 \quad X_{B_3}^5 \quad X_{B_3}^6 \quad X_{B_3}^7] = [280 \quad 260 \quad 360] \frac{1}{48} \cdot \begin{bmatrix} -32 & 32 & -12 & -10 \\ 16 & -16 & 12 & 2 \\ 8 & -8 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$F = \frac{1}{48}[-1920 \quad 1920 \quad -240 \quad 3480]$$

$$c_4 - F_4 = 0 - \frac{-1920}{48} = \frac{1920}{48} \geq 0$$

$$c_5 - F_5 = M - \frac{1920}{48} \geq 0$$

$$c_6 - F_6 = 0 - (-240) = 240 > 0$$

$$c_7 - F_7 = M - \frac{3480}{48} \geq 0$$

→ Оптимално решение

$$x_1 = \frac{2400}{48} = 50 \qquad x_3 = \frac{1440}{48} = 30$$

$$x_2 = \frac{7680}{48} = 160 \qquad f(x) = 79000$$

ПРИМЕР (Задача 14)

$$B_3 = [A_3\ A_1\ A_2] = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 5 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B_3^{-1} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 32 & -12 & -10 \\ -16 & 12 & 2 \\ -8 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$X_{B_3} = B_3^{-1} \cdot B = B_3^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 640 \\ 920 \\ 800 \end{bmatrix} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 1440 \\ 2400 \\ 7680 \end{bmatrix} \longrightarrow \quad x_1 = \frac{2400}{48} = 50 \quad x_3 = \frac{1440}{48} = 30 \quad x_2 = \frac{7680}{48} = 160 \quad f(x) = 79000$$

$$X_{B_3}^4 = B_3^{-1} \cdot A_4 = B_3^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} -32 \\ 16 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad X_{B_3}^6 = B_3^{-1} \cdot A_6 = B_3^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_{B_3}^5 = B_3^{-1} \cdot A_5 = B_3^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} 32 \\ -16 \\ -8 \end{bmatrix} \qquad X_{B_3}^7 = B_3^{-1} \cdot A_7 = B_3^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{48}\begin{bmatrix} -10 \\ 2 \\ 16 \end{bmatrix}$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ .....

$$F = [c_3\ c_1\ c_2] \cdot [X_{B_3}^4 \quad X_{B_3}^5 \quad X_{B_3}^6 \quad X_{B_3}^7] = [280 \quad 260 \quad 360] \frac{1}{48} \cdot \begin{bmatrix} -32 & 32 & -12 & -10 \\ 16 & -16 & 12 & 2 \\ 8 & -8 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$F = \frac{1}{48}[-1920 \quad 1920 \quad -240 \quad 3480]$$

$$c_4 - F_4 = 0 - \frac{-1920}{48} = \frac{1920}{48} \geq 0$$

$$c_5 - F_5 = M - \frac{1920}{48} \geq 0$$

$$c_6 - F_6 = 0 - (-240) = 240 > 0$$

$$c_7 - F_7 = M - \frac{3480}{48} \geq 0$$

$\rightarrow$ Оптимално решение

$$x_1 = \frac{2400}{48} = 50 \qquad x_3 = \frac{1440}{48} = 30$$

$$x_2 = \frac{7680}{48} = 160 \qquad f(x) = 79000$$

СИМПЛЕКС TABELA

СИМПЛЕКС ТАБЕЛА

$$
\begin{array}{l}
\max\{3x_1 + 4x_2\} \\
x_1 \le 1000 \\
x_2 \le 2000 \\
x_1 + x_2 \le 4400 \\
3x_1 + 2x_2 \le 6600 \\
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\max\{\ 3x_1 + 4x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 0y_4\ \} \\
x_1 + y_1 = 1000 \\
x_2 + y_2 = 2000 \\
x_1 + 2x_2 + y_3 = 4400 \\
3x_1 + 2x_2 + y_4 = 6600 \\
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4 \ge 0
\end{array}
$$

СИМПЛЕКС ТАБЕЛА

Матричната претстава на претходниот модел е:

$$\max\begin{bmatrix}3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1000\\2000\\4400\\6600\end{bmatrix}$$

Почетното решение се определува од дополнителните променливи и тое е сигурно единствено можно решенија:

$x_1=0,\ x_2=0,\ y_1=1000$

$y_2=2000,\ y_3=4400$

$y_4=6600$

Вредноста на функцијата на критериум е:

$$f(x)=3\cdot 0+4\cdot 0+0\cdot 1000+0\cdot 2000+$$
$$+0\cdot 4400+0\cdot 6600=0$$

СИМПЛЕКС ТАБЕЛА

C	B	x_0	3	4	0	0	0	0	$\underline{x_0}$
			x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	x_2
0	y_1	1000	1	0	1	0	0	0	
0	y_2	2000	0	1	0	1	0	0	
0	y_3	4400	1	2	0	0	1	0	
0	y_4	6600	3	2	0	0	0	1	
Z_k		0	0	0	0	0	0	0	
C_k-Z_k			3	4	0	0	0	0	

СИМПЛЕКС ТАБЕЛА

C	B	x_0	3	4	0	0	0	0	$\underline{x_0}$
			x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	x_2
0	y_1	1000	1	0	1	0	0	0	∞
0	y_2	2000	0	1	0	1	0	0	2000
0	y_3	4400	1	2	0	0	1	0	4400
0	y_4	6600	3	2	0	0	0	1	6600
Z_k		0	0	0	0	0	0	0	
C_k-Z_k			3	4	0	0	0	0	

СИМПЛЕКС ТАБЕЛА

C	B	x_0	3	4	0	0	0	0	$\underline{x_0}$
			x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	x_2
0	y_1	1000	1	0	1	0	0	0	∞
0	y_2	2000	0	1	0	1	0	0	2000
0	y_3	4400	1	2	0	0	1	0	4400
0	y_4	6600	3	2	0	0	0	1	6600
Z_k		0	0	0	0	0	0	0	
C_k-Z_k			3	4	0	0	0	0	

C	B	x_0	3	4	0	0	0	0	$\underline{x_0}$
			x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	x_2
0	y_1	1000	1	0	1	0	0	0	1000
4	x_2	2000	0	1	0	1	0	0	∞
0	y_3	400	1	0	0	-2	1	0	400
0	y_4	2600	3	0	0	-2	0	1	866,66
Z_k		8000	0	4	0	4	0	0	
C_k-Z_k			3	0	0	-4	0	0	

Ако е r редицата што излегува од базата , а k колоната што влегува во базата елементите од секоја следна табела се пресметуваат според изразот

$$f_{ij}' = f_{ij} - \frac{f_{rj} \cdot f_{ik}}{f_{rk}}$$

СИМПЛЕКС ТАБЕЛА

C	B	x_0	3 x_1	4 x_2	0 y_1	0 y_2	0 y_3	0 y_4	$\frac{x_0}{x_1}$
0	y_1	1000	1	0	1	0	0	0	1000
4	x_2	2000	0	1	0	1	0	0	∞
0	y_3	400	1	0	0	-2	1	0	400
0	y_4	2600	3	0	0	-2	0	1	866,66
Z_k		8000	0	4	0	4	0	0	
C_k-Z_k			3	0	0	-4	0	0	

C	B	x_0	3 x_1	4 x_2	0 y_1	0 y_2	0 y_3	0 y_4	$\frac{x_0}{y_2}$
0	y_1	600	0	0	1	2	-1	0	300
4	x_2	2000	0	1	0	1	0	0	2000
3	x_1	400	1	0	0	-2	1	0	-200
0	y_4	1400	0	0	0	4	-3	1	430
Z_k		9200	3	4	0	-2	3	0	
C_k-Z_k			0	0	0	2	-3	0	

$$f_{ij}' = f_{ij} - \frac{f_{rj} \cdot f_{ik}}{f_{rk}}$$

СИМПЛЕКС ТАБЕЛА

C	B	x_0	3 x_1	4 x_2	0 y_1	0 y_2	0 y_3	0 y_4	$\frac{x_0}{y_2}$
0	y_1	600	0	0	1	2	-1	0	300
4	x_2	2000	0	1	0	1	0	0	2000
3	x_1	400	1	0	0	-2	1	0	-200
0	y_4	1400	0	0	0	4	-3	1	430
Z_k		9200	3	4	0	-2	3	3	
C_k-Z_k			0	0	0	2	-3	-3	

$$f_{ij}' = f_{ij} - \frac{f_{rj} \cdot f_{ik}}{f_{rk}}$$

C	B	x_0	3 x_1	4 x_2	0 y_1	0 y_2	0 y_3	0 y_4	x_0
0	y_2	300	0	0	1/2	1	-1/2	0	
4	x_2	1700	0	1	-1/2	0	1/2	0	
3	x_1	1000	1	0	1	0	0	0	
0	y_4	200	0	0	-2	0	-1	1	
Z_k		9800	3	4	1	0	2	0	
C_k-Z_k			0	0	-1	0	-2	0	

Оптимално решение

$x_1 = 1000$

$x_2 = 1700$

$f(1000,1700) = 9800$