доц. д-р Ѓорѓи Манчески вер. 2.0

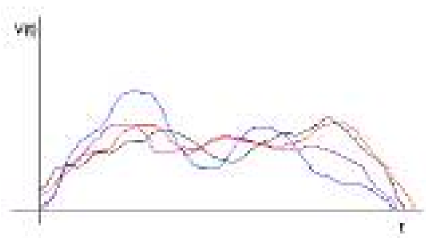
СЛУЧАЈНИ ПРОЦЕСИ

ОСНОВНИ ПОИМИ

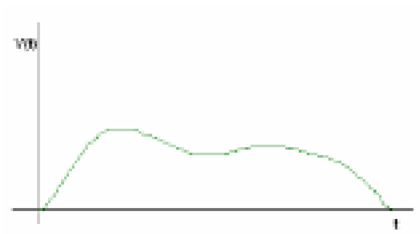
Под стохастички процес ќе подразбираме процес кој можеме да го анализираме без разлика на поранешната состојба.

По еден завршен експеримент велиме дека процесот се реализирал и за процесот велиме дека е **реализиран стохастички процес**.

I Нека разгледаме автобус на релација од А до В. Неговата реализирана брзина варира околу теориската брзина. Варирањето на брзината во текот на времето при различни “екперменти” може да се претстави на следниот дијаграм:



Реализирани брзини.



Теориска брзина.

ОСНОВНИ ПОИМИ

II Нека разгледаме еден сервис на радиоапарати што на определена територија сервисира 2000 радиоапарати. Теориски бројот на апаратите што можат да се расипат во еден временски интервал t е број што се движи од 0 до 2000. Но за сервисот овој број практично е бесконечен бидејќи по самото поправање апаратот може повторно да се расипе.

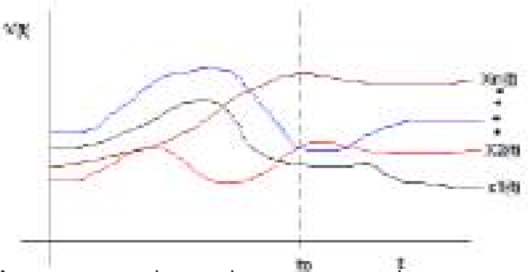
Бројот на расипани апарати во текот на еден временски интервал претставува алеаторна променлива.

Ако работниот ден се подели на n временски интервали бројот на расипани радиоапарати во текот на времето се менува. Вака добиените вредности претставуваат еден алеаторен процес.

Ако реализацијата е во функција од времето X(t) тогаш станува збор за алеаторен процес.

Ако го фиксираме времето (т.е. ги анализираме реализациите за едно точно определено (t) тогаш станува збор за алеаторна променлива.

ОСНОВНИ ПОИМИ



Алеаторната функција не може графички да се прикаже. Приказот може да биде единствено на остварувањето X(t).

За дефинирање на законот на распоред на алеаторната функција се одбираат k временски интервали во еден временски интервал (0, t) и за секое t_i се добива алеаторна променлива $X(t_i)$. Со други зборови на моментите

$t_1, t_2, t_3, \dots, t_i, \dots, t_k$

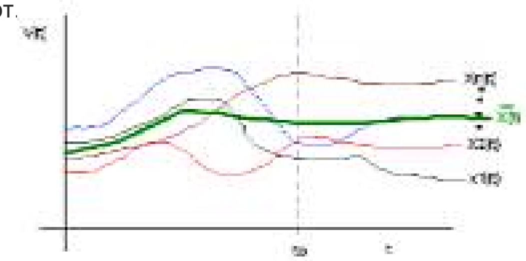
одговара низа од k алеаторни променливи $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_i), \dots, X(t_k)$.

КАРАКТЕРИСТИКИ НА АЛЕАТОРНИТЕ ФУНКЦИИ

Очекуваната вредност на алеаторната функција X(t) т.е. E[X(t)] е една неалеаторна функција на реалниот параметар t која за фиксирано t еднакво на очекуваната вредност на алеаторната променлива која настапува во пресекот на алеаторната функција.
Геометриски тоа претставува збир од точки кои ја претставуваат средната вредност E[X(t_0)] на пресекот на стохастичкиот процес.

$$E[X(t)] = \overline{x}(t)$$

E[X(t)] претставува средна функција околу која варираат реализациите на процесот.



КАРАКТЕРИСТИКИ НА АЛЕАТОРНИТЕ ФУНКЦИИ

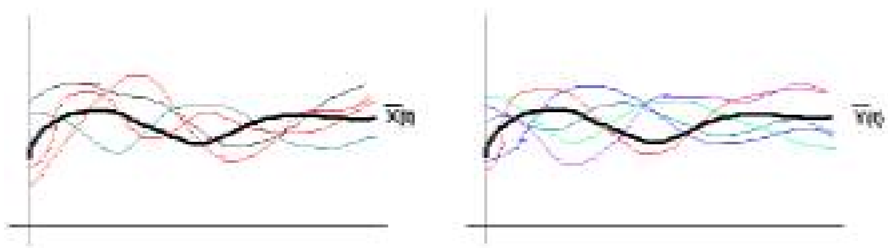
$$\sigma_x^2(t) = E[X(t) - \overline{x}(t)]^2$$

Може да се случи две алеаторни функции X(t) и Y(t) имаат исти очекувани вредности и варијанси, а нивниот карактер да е различен.

Ако е исполнето: $\overline{x}(t) = \overline{y}(t)$ и

$$\sigma_x^2(t) = \sigma_y^2(t)$$

процесите не мора да бидат исти.



КАРАКТЕРИСТИКИ НА АЛЕАТОРНИТЕ ФУНКЦИИ

Корелационата функција го определува степенот на зависност помеѓу алеаторните функции.

Корелационата функција се дефинира како:

$$K[X(t);Y(t)] = E\left\{[X(t)-\bar{x}(t)][Y(t)-\bar{y}(t)]\right\}$$

Автокорелационата функција претставува степан на зависност помеѓу два процеси на иста алеаторна функција. Ако земеме да се t' и t" моменти, тогаш автокорелационата функција е дефинирана како:

$$K[X(t):t',t''] = E\left\{[X(t')-\bar{x}(t')][X(t'')-\bar{x}(t'')]\right\}$$

По аналогија со коефициентот на корелација имаме:

$$r(X(t),Y(t)) = \frac{K[X(t),Y(t)]}{\sigma_x(t)\cdot\sigma_y(t)}$$ - корелационен коефициент на две алеаторни функции

$$r(x',x'') = \frac{K_x[t',t'']}{\sigma_x(t')\cdot\sigma_x(t'')}$$ - автокорелационен коефициент на алеаторна функција

НЕКОИ ОСОБИНИ НА АЛЕАТОРНИТЕ ФУНКЦИИ

Нека е φ(t) е било каква неалеаторна функција на параметарот t, тогаш трансформацијата

$$X(t)+\phi(t)$$

претставува нова алеаторна функција

$$Y(t) = X(t)+\phi(t)$$

со особини

1. $E[Y(t)] = E[X(t)+\varphi(t)],\quad или$

   $\bar{y}(t) = \bar{x}(t)+\varphi(t)$
2. $E[Y(t)-\bar{y}(t)]^2 = E[X(t)-\bar{x}(t)]^2,\quad или$

   $\sigma_y^2(t) = \sigma_x^2(t)$
3. $K_y(t',t'') = K_x(t',t'')$

НЕКОИ ОСОБИНИ НА АЛЕАТОРНИТЕ ФУНКЦИИ

Нека е φ(t) е било каква неалеаторна функција на параметарот t, тогаш трансформацијата

$$Y(t) = \varphi(t) \cdot X(t)$$

со особини

1. $E[Y(t)] = E[\varphi(t) \cdot X(t)] = \varphi(t) \cdot E[X(t)], \quad \text{или}$
   $\overline{y}(t) = \varphi(t) \cdot \overline{x}(t)$
2. $E[Y(t) - \overline{y}(t)]^2 = E[\varphi(t) \cdot X(t) - \varphi(t) \cdot \overline{x}(t)]^2 = \varphi^2(t) E[X(t) - \overline{x}(t)]^2, \quad \text{или}$
   $\sigma_s^2(t) = \varphi^2(t) \cdot \sigma_x^2(t)$

СТАЦИОНАРНОСТ НА СТОХАСТИЧКИ ПРОЦЕСИ

Во пракса често пати се среќаваат стохастички процеси кои во текот на времето не покажуваат промени туку во исти временски интервали се приближно слични. Ваквите процеси ги нарекуваме стационарни стохастички процеси.

Функцијата X(t) ќе биде стационарна ако сите карактеристики на дадениот процес не зависат од t т.е.

$$\overline{x}(t) = E[X(t)] = konst.$$

$$\sigma_x^2(t) = E[X(t) - \overline{x}(t)]^2 = konst.$$

$$K_x(t', t'') \quad \text{за } t'' = t' + \tau \quad \text{настанува } K_x(t', t'+\tau) = K_x(\tau)$$

Што значи дека автокоралационата на еден стационарен стохастички процес е функција од еден аргумент и тоа должината на интервалот.

POISSON-ОВ ПРОЦЕС

Нека посматраме некој сервис за поправка на апарати за домаќинство.

За да може подобро да се објаснат појавите еден важен елемент е текот на доаѓањето.

Текот на доаѓање може да биде изразен со некоја алеаторна функција X(t), која за фиксирано t би го претставувала бројот на клиенти во интервалот со должина t што дошле во сервисот.

Бројот на клиенти може да биде: 0, 1, 2, 3, ..., m каде m е најголем можен број на клиенти кои би дошле во сервисот.

Нека ја избереме должината на времето t+Δt, а со p_k(t+Δt) - веројатност дека ќе се остварат k доаѓања на клиентите во времето t+Δt. На сликата се дадени временските интервали t и t+Δt:

POISSON-ОВ ПРОЦЕС

Можно е со k доаѓања во должината на времето 0÷t+Δt да се оствари по следнава шема:

Интервали	Број на доаѓања во дадениот интервал					
(0÷t)	k	k-1	k-2	…..	1	0
(t÷t+Δt)	0	1	2	…..	k-1	k

Ако се земат во предвид следниве претпоставки:

1. текот на доаѓање е стационарен, т.е. p_k(t) не зависи од почетокот туку само од k и должината на интервалот,
2. бројот на доаѓања во интервалот (a÷a+t) не зависи од бројот на доаѓањата во почетокот на интервалот, и
3. важи $\lim \sum_{k=2}^{\infty} p_k(\Delta t) = 0, \quad \Delta t \to 0$

можат да се определат веројатностите p_k(t).

POISSON-ОВ ПРОЦЕС

Имајќи го во предвид условот 2, случаевите во поедини интервали се меѓусебно независни, па и во одредувањето на веројатноста оваа независност се зема во предвид.

При одредувањето на $p_k(t+\Delta t)$ се земаат во предвид сите можности на реализација дадени во претходната шема т.е.:

$$p_k(t+\Delta t) = p_k(t)p_0(\Delta t) + p_{k-1}(t)p_1(\Delta t) + \ldots + p_1(t)p_{k-1}(\Delta t) + p_0(t)p_k(\Delta t)$$

$$\text{или} \quad p_k(t+\Delta t) = \sum_{i=0}^{k} p_{k-i}(t)p_k(\Delta t) \qquad 4.6.1.$$

Ако Δt->0 тогаш според условот 3 во интервалот Δt можат да се остварат 2 и повеќе остварувања, па е

$$\sum_{i=2}^{k} p_i(\Delta) = 0 \cdot (\Delta t), \quad \text{за } \Delta t \to 0$$

затоа што $\lim p_i(\Delta t) \to 0$ за секое $\Delta t \to \infty$

POISSON-ОВ ПРОЦЕС

Со користење на претхосниот израз 4.6.1. ја добива следнава форма:

$$p_k(t+\Delta t) = p_k(t)p_0(\Delta t) + p_{k-1}(t)p_1(\Delta t) \qquad 4.6.2.$$

Со претпоставка дека Δt->0, се добива

$$p_0(\Delta t) + p_1(\Delta t) = 1$$

Нека е $p_i(\Delta t)$ пропорционално на должината на интервалот Δt

$$p_1(\Delta t) = \lambda \Delta t$$

каде што е λ коефициент на пропорционалноста, тогаш е

$$p_0(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t$$

ако овој израз се стави во 4.6.2. се добива

$$p_k(t+\Delta t) = p_k(t)\cdot(1-\lambda\Delta t) + p_{k-1}(t)\cdot\lambda\cdot\Delta t$$

$$p_k(t+\Delta t) - p_k(t) = -\lambda\cdot[p_k(t) - p_{k-1}(t)]\cdot\Delta t$$

ако се подели со Δt се добива

$$\frac{p_k(t+\Delta t) - p_k(t)}{\Delta t} = -\lambda[p_k(t) - p_{k-1}(t)]$$

POISSON-ОВ ПРОЦЕС

За $\Delta t \to 0$ се добива:

$$p'_k(t) = -\lambda[p_k(t) - p_{k-1}(t)] \qquad 4.6.3.$$

Изразот 4.6.3. претставува систем на диференцијални равенки
За k=0 се добива:

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t)$$

и почетни услови:

$$p_0(0) = 1$$

$$p_k(0) = 1$$

се добива

$$\frac{p'_0(t)}{p_0(t)} = -\lambda \quad \textit{со решавање седобива}$$

$$\ln p_0(t)\Big|_0^t = -\lambda t\Big|_0^t$$

$$\ln p_0(t) = -\lambda t$$

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}$$

POISSON-ОВ ПРОЦЕС

За останатите вредности k=1, 2, 3, …се зема следнава замена

$$p_k(t) = e^{-\lambda t} \cdot U_k(t) \quad \textit{каде} \quad U_k(t) \quad \textit{е некоја ротошотфункција}$$

$$p'_k(t) = e^{-\lambda t} \cdot U'_k(t) - \lambda U_k(t) e^{-\lambda t}$$

Заменувајќи ги овие изрази во 4.6.3. се добива следната диференцијална равенка

$$U'_k(t) = \lambda U_{k-1}(t); i = 0,1,2,...$$

$$\textit{при} \quad U_{-1}(t) = 0$$

по интегрирањето се добива:

$$U_k(t) - U_k(0) = \lambda \int_0^t U_{k-1}(t)dt$$

од $p_0(0) = 1 \quad \textit{и} \quad p_k(0) = 0 \quad \textit{следи}$

$$U_0(0) = 1 \quad \textit{и} \quad U_k(0) = 0 \quad \textit{за} \quad k \geq 0$$

па е $U_k(t) = \lambda \int_0^t U_{k-1}(t)dt$ за k=1 имаме $U_1(t) = \lambda \int_0^t U_0(t)dt$

POISSON-ОВ ПРОЦЕС

Како е $p_0(t) = e^{-\lambda t}$

$U_0(t) = 1, \quad на\ е$

$U_1(t) = \lambda t$

За k=2, се добива $U_2(t) = \lambda \int_0^t U_1(t)dt = \lambda \int_0^t \lambda t dt = \frac{(\lambda t)^2}{2!}$

За понатамошна постапка добиваме

$$U_3(t) = \frac{(\lambda t)^3}{3!}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$U_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

по извршената замена се добива $p_k(t) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}$ 4.6.4.

Според тоа бројот на доаѓања на клиентите има Poisson-ов распоред со параметарот λt. За процес кој се однесува според горенаведеното велиме дека е Poisson-ов процес.

МАРКОВ ПРОЦЕС

Нека е дадено множество на можни независни остварувања $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$. (конечен или бесконечен), и нека на секое остварување одговара веројатност p_i.

Веројатноста на заедничко остварување според теоремата на сложена веројатност е

$$P[E_{j0}, E_{j1}, \ldots, E_{jn}] = p_{j0} \cdot p_{j1} \cdot \ldots \cdot p_{jn}$$

Нека оваа задача ја прошириме за случај да настанот E_k зависи само од претходниот настан, па на парот (E_jE_k) ќе одговара условна веројатност p_{kj}, или p_{jk}, каде што редоследот на индексите го означува редоследот на настаните. Ако е се остварил настанот E_j, тогаш веројатноста дека во следниот експеримент ќе се оствари настанот E_k е еднаква на p_{jk}.

Ако е a_j почетна веројатност за E_j, тогаш е

$$P(E_j, E_k) = a_i p_{jk}$$

За три настани пак е:

$$P(E_j, E_k, E_s) = a_j p_{jk} p_{ks}$$

МАРКОВ ПРОЦЕС

За n-настани при почетна состојба E_{j0}, веројатноста ќе биде:

$$P[E_{j0}, E_{j1}, ..., E_{jn}] = a_{j0} \cdot p_{j0} \cdot p_{j1} \cdot ... \cdot p_{j_{n-1}j_n}$$

Овој проблем е познат под името “Марковљев ланец”.
Ако системот во времето t се наоѓа во состојба E_j веројатноста p_{jk} веројатност на премин од состојба E_j во состојба E_k.
Ако постојат n можни состојби тогаш веројатностите на премин од една во друга се претставуваат во матрица:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Оваа матрица се нарекува **стохастичка матрица** или **транзитивна матрица**

КАРАКТЕРИСТИКИ НА ТРАНЗИТИВНА МАТРИЦА

1. Сите елементи, како веројатности се ненегативни броеви
2. Збирот на елементите на било кој ред е 1 т.е. за било кое I,
3. Степенот на транзитивна матрица P е P^r, за r=1, 2 ,3 , … , е исто така транзитивна матрица

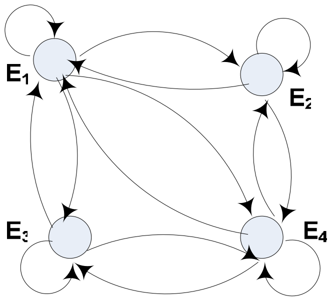
Пример: Нека на пазарот може да се набави артиклот L од 4 различни производувачи. Производувачите нека ги означиме со P_1, P_2, P_3 и P_4. Почетната веројатност дека купувачот ќе купи артикал L од производувачот P_1 е 0.4, P_2 е 0.2, P_3 е 0.3 и P_4 е 0.1. Купувачот после првото купување може да купи артикал од истиот или друг производувач.

Со стохастички методи се определени транзитивните веројатности p_{ij} т.е.:

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

МАРКОВЉЕВИ ЛАНЦИ

На графиконот се дадени можните премини:



Веројатноста дека куоувачот првото купување на артиклот L ќе го направи од P1, второто од P2 а третото од P4 е:

$$P[E_1, E_2, E_4] = 0.5 \cdot P(E_1 \to E_2) \cdot P(E_2 \to E_4) = 0.5 \cdot 0.2 \cdot 0.1 = 0.01$$

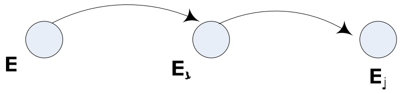
МАРКОВЉЕВИ ЛАНЦИ

Може да се постави и следниот проблем: Да се определи веројатноста да купувачот првото купување купувачот на производот го направил од P_i а третатото од P_j.

Ова е познат проблем на премин на системот од состојба Ei во Ej во “повеќе чекори”.

Прво ќе го разгледаме примерот на премин на системот од една во друга состојба во два чекори.

Овој случај е претставен на сликата:



$$p_{ij}^{(2)} = p_{i1}p_{1j} + p_{i2}p_{2j} + \dots + p_{i\nu}p_{\nu j} + \dots + p_{in}p_{nj}$$

или

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{\nu=1}^{n} p_{i\nu}p_{\nu j}$$

Со $p_{ij}^{(2)}$ е означена веројатноста на премин на состојбата од Ei во Ej за точно “2 чекори”. Добиените веројатности на премин во “два чекори” према особините на производ на матрци се добива **P·P=P²**

МАРКОВЉЕВИ ЛАНЦИ

Според претходно кажаното се добива:

$$P\cdot P=\begin{bmatrix}0.7 & 0.2 & 0.1 & 0\\ 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1\\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.1\\ 0.5 & 0.3 & 0.1 & 0.1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0.7 & 0.2 & 0.1 & 0\\ 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1\\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.1\\ 0.5 & 0.3 & 0.1 & 0.1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.56 & 0.24 & 0.17 & 0.03\\ 0.40 & 0.29 & 0.24 & 0.07\\ 0.24 & 0.25 & 0.42 & 0.09\\ 0.50 & 0.27 & 0.18 & 0.05\end{bmatrix}$$

Погоре определената веројатност $P_{23}^{(2)}=0.24$ може да се спореди со веројатноста која се најдува во вториот ред и третата колона на матрицата P^2 и изнесува о.24 т.е.

$$P[E_2\rightarrow E_3]^{(2)}=p_{23}^{(2)}=0.24$$

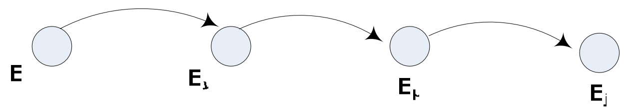
За можни состојби на системот Ω ако се $E_1, E_2, E_3, \dots, E_i, \dots, E_j, \dots, E_n$ веројатностите на премин во "два чекори" се добиваат на начин

$P\cdot P=P^2$ или

$$P[E_i\rightarrow E_j]^{(2)}=p_{ij}^{(2)}=\sum_{\nu=1}^{n}p_{i\nu}p_{\nu j}$$

МАРКОВЉЕВИ ЛАНЦИ

Аналогно на ова можат да се определат веројатностите на премин на состојбите во "повеќе чекори". За премин во "три чекори" се користи шемата:



од која што следи:

$$P[E_i\rightarrow E_3]^{(3)}=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}p_{i\nu}p_{\nu\mu}=\sum_{\nu=1}^{n}p_{i\nu}\left(\sum_{\mu=1}^{n}p_{\nu\mu}p_{\mu j}\right)=\sum_{\nu=1}^{n}p_{i\nu}p_{\nu j}^{(2)}$$

или

$$P[E_i\rightarrow E_3]^{(3)}=\sum_{\mu=1}^{n}p_{i\mu}^{(2)}p_{\mu j}$$

МАРКОВЉЕВИ ЛАНЦИ

Од производот на матриците може да се констатира дека веројатностите на премин на системот во “два чекори” се добиваат на следниот начин:

$$P^3 = P \cdot P^2 = P^2 \cdot P$$

За премин во “повеќе чекори” продолжувајќи ја анализата следи

$$P[E_i \to E_j]^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{n} p_{i\nu}^{(k-1)} \cdot p_{\nu j} = \sum_{\nu=1}^{n} p_{i\nu} \cdot p_{\nu j}^{(k-1)}$$

Овие веројатности можат да се определат и на следниов начин:

$$P[E_i \to E_j]^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{n} p_{i\nu}^{(k-s)} \cdot p_{\nu j}^{(s)}; \quad i < s < k$$