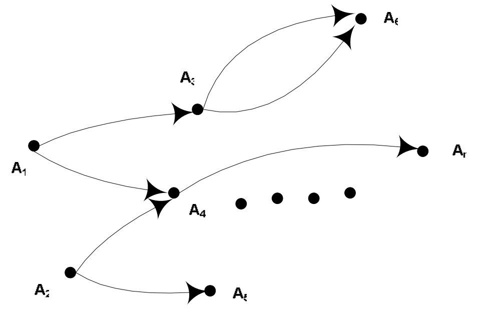
доц. д-р Ѓорѓи Манчески вер. 2.0

ГРАФОВИ

ЕЛЕМЕНТИ И ДЕФИНИЦИЈА НА ГРАФОВИТЕ

Во задачите кој кои што со должини (или со лаци) можат да се искажуваат промени (барања, време, цени, растојанија, демографски феномени, движње на појави и др.) прегледно е во мрежа од должини (лаци) се прикажат сите промени.

Пример: Нека е дадено преброиво множество на точки (конечен или бесконечен): A_1, A_2, A_3, … , A_n.



На фигурата од сликата, точките се нарекуваат **темиња** или **врвови**, а должините односно лаците во општ случај се нарекуваат **оријентирани лаци**.

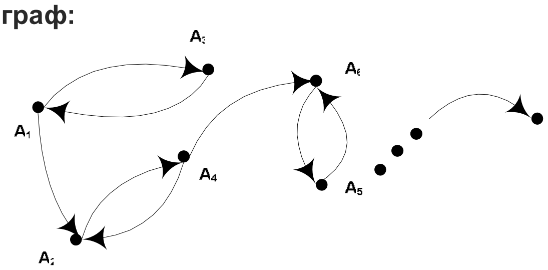
ЕЛЕМЕНТИ И ДЕФИНИЦИЈА НА ГРАФОВИТЕ

Во случај на взаемна коресподенција на две точки A_i и A_j внесуваме два лаци $\overset{\frown}{A_i A_j}$ и $\overset{\frown}{A_j A_i}$ и секој се снавден со соодветна вредност на барањето, растојанието или некој друга категорија:

$$\overset{\frown}{A_i A_j}(a) \qquad \overset{\frown}{A_j A_i}(b)$$

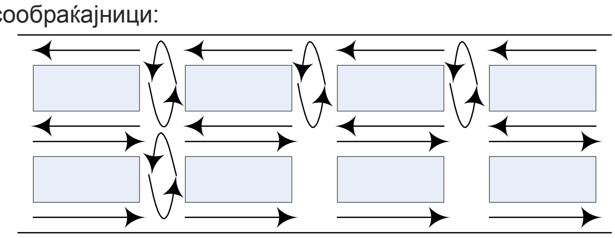
Според ова претходно опишаната фигура претставува граф.

Пример за граф:

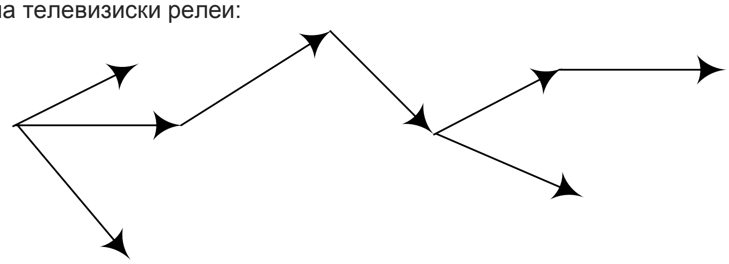


ГРАФОВИТЕ КАКО МОДЕЛ НА РЕАЛНИ СИСТЕМИ

Мрежа на сообраќајници:

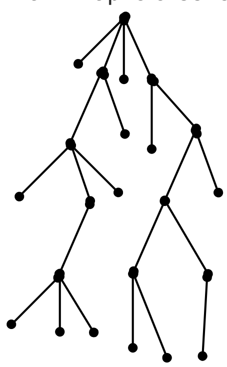


Мрежа на телевизиски релеи:

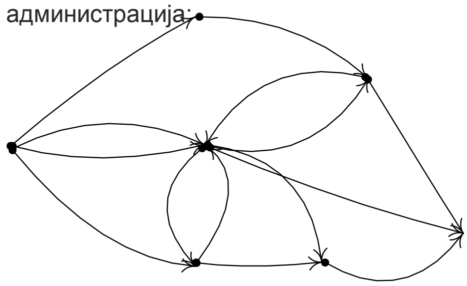


ГРАФОВИТЕ КАКО МОДЕЛ НА РЕАЛНИ СИСТЕМИ

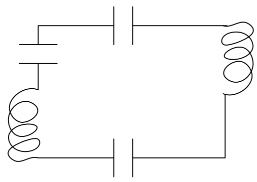
1. Фамилјарно стебло:



2. Движење на досиејата во администрација:



3. Електрична мрежа:



4. Задачите од областа на транспортот, монтажните проекти исто така е практично да се претстацуваат со граф.

ОСНОВНИ ЕЛЕМЕНТИ НА ГРАФОТ

Основни елементи на графот се:

- темиња (врвови),
- оријентирани лаци,
- вредности на обележјето.

Темињата ги обележуваме со A_i, оријентираните лаци со $\overrightarrow{A_iA_j}$ и вредностите со мали букви a, b, … , или a_{ij}.

Комплетен граф со положбите на темињата е

$$\overrightarrow{A_iA_j}(a_{ij}),\ i = 1,2,....,\ \ j = 2,3,....$$

Математичката формулација на графот следи од директниот производ на две множества.

проф. д-р Здравко Стојаноски, доц. д-р Ѓорѓи Манчески вер. 1.0

МАТЕМАТИЧКА ДЕФИНИЦИЈА НА ГРАФ

Под директен производ на две множества A и B подразбираме множество на сите можни подредени парови, такви да првиот секогаш му припаѓа на левото множество, а другиот на десниот во производот.

Директниот производ на две множества симболички се обележува со AXB.

Пример: $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ и $B=\{b_1,b_2\}$

Директниот производ на двете множества има 2x3=6 елементи и истиот го има следниот облик:

$$AxB=\{\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_1,b_2\rangle,\langle a_2,b_1\rangle,\langle a_2,b_2\rangle,\langle a_3,b_1\rangle,\langle a_3,b_2\rangle,\}$$

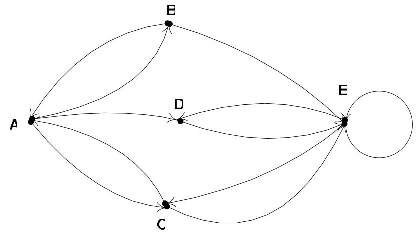
Од изразот се гледа дека навистина елементите се подредени парови:

$$\langle a_i,b_j\rangle, \quad i=1,2,3 \quad j=1,2$$

МАТЕМАТИЧКА ДЕФИНИЦИЈА НА ГРАФ

Графот се дефинира како дел на директниот производ т.е. тој е множество составено само од некои елементи на производот AxB.

Елементите што се членови на графот го задоволуваат условот т.е. графот даден во облик на фигура со темиња и лаци помеѓу темињата во кои се содржани можните премини од темето A_i во A_j за сите i и j.



Премини постојат за:

Г(A)={B, C, D}

Г(B)={A, E}

Г()={A, E}

Г()={E}

Г()={C, D, E}

МАТЕМАТИЧКА ДЕФИНИЦИЈА НА ГРАФ

Постоењето на преминот A_i->A_j односно непостоењето регулирано е со бинарната променлива

$$X = \begin{cases} 1, \text{ ако постои премин} \\ 0, \text{ ако не постои премин} \end{cases}$$

Вредноста на променливата X се дадани во дводимензионална шема:

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	1	0
B	1	0	0	0	1
C	1	0	0	0	1
D	0	0	0	0	1
E	0	0	1	1	1

Од дадената табела може да се констатира дека постои премин од A до C, а не постои од A во E итн.

На било кој граф разликуваме оторен, кружен пат и петља. На претходнипт граф има:

- отворени патишта: ACE, ADE итн.
- кружни патишта: ABA, ACECA итн.
- петљи: EE

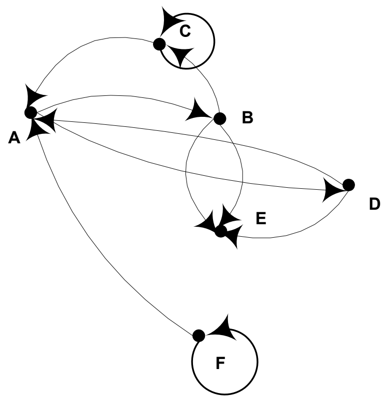
МАТЕМАТИЧКА ДЕФИНИЦИЈА НА ГРАФ

Кај многу графови можно е да нема некои од овие патишта.
За графот за кој нема AA, BB, …., викаме дека е граф без петљи.
Ако графот е без кружен пат ќе речеме дека е граф без кружен пат.

Од додимензионалната шема може да се констатира коресподенцијата помеѓу местата.

Пример:

	A	B	C	D	E	F
A		1		1		
B			1		1	
C	1		1			
D	1				1	
E		1				
F	1					1



КРИТИЧЕН ПАТ

Било кој сложен проект се состои од повеќе едноставни операции кои се зависни или независни, кои истовремено можат да се обработуваат, или не, кои во еден одреден редослед мораат да се извршуваат.

Со граф се изразуваат односите, можни операции, вредности на захтевите и останати потребни квантитативни показатели.

Во вакви случаеви интересен е одговорот на прашањето: **кој е најдолг пат од почетокот A_i до A_n?**

Најдолгиот пат во реализацијата на проектот кој е даден со граф се нарекува **критичен пат**.

Ако на графор е дадена операцијата P(i, j), тогаш темето i е споено со темато j. Со други зборови темето i е почеток на операцијата, а темето j е крај на операцијата P(i, j).

НЕКОИ ПОИМИ ЗА ПАТ ВО ГРАФОТ

Под поимот **потполн пат** подразбираме било кој пат од почетокот A_1 до карјот A_n.

Под поимот **претходен пат** на темето i подразбираме пат од почетокот A_1 до темето A_i.

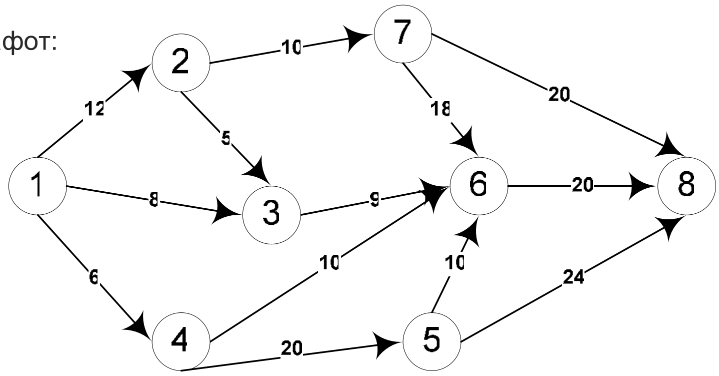
Под **пат кој следи** за i подразбираме пат којшто почнува во темето A_i и завршува во A_n.

Под **патот (i, j)** подразбираме пат помеѓу темињата A_i и A_j.

Ако со P(i, j) го означиме траењето на операцијата P(i, j) за секој пат можно е да се одреди траењето на сите операции кои се јавуваат во дадениот пат.

ПАТИШТА ВО ГРАФОТ

Нека е даден графот:



Од дадениот граф можат да се определат следниве патишта:

L1: (1, 2, 7, 8)

L2: (1, 2, 7, 6, 8)

L3: (1, 2, 3, 6, 8)

L4: (1, 3, 6, 8)

L5: (1, 4, 6, 8)

L6: (1, 4, 5, 6, 8)

L7: (1, 4, 5, 8)

КРИТИЧЕН ПАТ

Преглед на операциите по патишта како и вкупното траење на патиштата:

L1: (1, 2), (2, 7), (7, 8)	12+10+22=44
L2: (1, 2), (2, 7), (7, 6), (6, 8)	12+10+18+20=60
L3: (1, 2), (2, 3), (3, 6), (6, 8)	12+5+9+20=46
L4: (1, 3), (3, 6), (6, 8)	8+9+20=37
L5: (1, 4), (4, 6), (6, 8)	6+10+20=36
L6: (1, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 8)	6+20+10+20=56
L7: (1, 4), (4, 5), (5, 8)	6+20+24=50

Од претходното следи дека критичен пат за графор е патот L2 т.е.

1 – 2 – 7 – 6 – 8

Критучниот пат го означуваме со L_{kr}.

За даден проблем може да се случи повеќе патишта да се критични.

ВРЕМИЊА

Разликите на време на критичниот пат во однос на другите патишта се нарекуваат временски резерви.

Во секое теме на графот се дефинираат следниве времиња:

1. Максималното траење на операцијата од почеток до темето i го означуваме со t(.i),
2. Максималното траење на операциите од темето i до крај го означуваме со t(i.),
3. Разликата помеѓу траењето на критичниот пат и максималното траење на операциите од темето i до крај го означуваме со

$$t^*(i)=t(L_{kr})-t(i.)$$

Под резерва на траење на операциите кај темето i ја подразбираме разликата

$$t^*(i)-t(.i)$$

или $t(L_{kr})-[t(.i)-t(i.)]$ и ќе ја означиме со

$$R(i)=t^*(i)-t(.i)$$

ВРЕМЕНСКИ РЕЗЕРВИ

Операција	Операции на максималниот ат до темето i	Операции од темето i до крајот по максималниот пат	t(.i)	t*(i)	Резерва на траење за i
1	(1,2)	(2,7), (7,6), (6,8)	12	12	0
2	(1,2), (2,3)	(3,6), (6,8)	17	31	14
3	(1,4)	(4,5), (5,6), (6,8)	6	10	4
4	(1,4), (4,5)	(5,6), (6,8)	26	30	4
5	(1,2), (2,7), (7,6)	(6,8)	40	40	0
6	(1,2), (2,7)	(7,6), (6,8)	22	22	0
7	(1,2), (2,7), (7,6), (6,8)		60	60	0

ВРЕМЕНСКИ РЕЗЕРВИ

Ако се знаат t(.i) и t*(i) за сите пунктови на графот можат да се поставaт некои односи помеѓу поранодефинираните траења и траењата на операцијата P(i,j).

Нека е t(i,j) траење на операцијата P(i,j) и t(.i) и t*(i) порано дефинираните траења, тогаш за еден граф кој претставува множество на сите можни премини важи следното:

1. **Потполно резервно време на патот** $R(L)=t(L_{kr})-t(L)$

Резервни времиња на операциите

1. **Потполно резервно време**

   t*(j)-t(.i)-t(i,j)

2. **Слободно резервно време**

   t(.j)-t(.i)-t(i,j)

3. **Делимично резервно време**

   t(.j)-t*(i)-t(i,j)